D.S. Induction

Pas de nom → 0 ; illisible → non lu

Exercice 1 : M.q. la définition d'ensemble inductif comme plus petit ensemble t.q. [...] a un sens.

> Soit F l'ensemble des ensembles F_i satisfaisant : $B \subset F_i$ et $\forall R_j, \forall (x_1, ..., x_{n_j} \in E), R_j(x_1, ..., x_{n_j}) \in F_i$. L'ensemble F est non vide, puisqu'il contient E. Notons M l'intersection des éléments de F. Pour tout i, $M = F_i \cap \left(\bigcap_{j \neq i} F_j \right) \subset F_i$. De plus, $\forall x \in B, \forall F_i \in F, x \in F_i$ par définition de F. Ainsi, pour tout $x \in B, x \in \bigcap_i F_i : B \subset \bigcap_i F_i$. (on montre de même la stabilité par appel aux règles d'inférence). Ainsi M appartient à l'ensemble F, et est plus petit au sens de l'inclusion que tout autre élément de F : c'en est le minimum.

Exercice 2 : Donner le lien entre éléments minimaux et minimas. **Justifier.**

> Un élément minimal n'est pas forcément un minimum. Par exemple, dans l'ensemble $E = \{2, 3\}$ muni de l'ordre induit par la divisibilité, 2 est un élément minimal, puisqu'aucun élément de E ne le divise sauf lui-même, mais n'est pas un minimum, puisque 2 ne divise pas 3.
> Un minimum est forcément un élément minimal. Soient x un minimum de E, et $y \in E$, tel que $y \leqslant x$. Puisque x est un minimum, $x \leqslant y$. Par antisymétrie de la relation d'ordre $\leqslant$, $x = y$. Ceci étant valable pour tout $y \in E$ tel que $y \leqslant x$, x est un élément minimal.

Exercice 3 : Soit G l'ensemble des mots de la forme $x.\varphi(x)$, pour x un mot binaire quelconque, avec $\forall a, b \in \{0,1\}^*, \varphi(a.b) = \varphi(a).\varphi(b)$ et $\forall a \in \{0,1\}, \varphi(a) = 1 - a$.
Attention !, je ne lis une réponse que si la précédente est juste.

1. Donner un mot de G de longueur 8. Combien y a-t-il de mots de longueur 4 dans G ?

   > Par exemple 00001111. Il en existe $2^2 = 4$.

2. On considère la suite u, telle que $u_0 = 0$, et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \psi(u_n)$, où $\psi(a.b) = \psi(a).\psi(b)$, $\psi(0) = 01$, et $\psi(1) = 10$. Donner les quatre premiers termes de cette suite.

   > 0, 01, 0110, 01101001, 0110100110010110, etc.

3. On note E le plus petit ensemble tel que $0 \in E$ et $\dfrac{u \in E}{u.\varphi(u) \in E}$. Montrer par induction structurelle sur E que pour tout $u \in E, \psi(\varphi(u)) = \varphi(\psi(u))$.

   > Soit $P(u)$ la propriété : " $\psi(\varphi(u)) = \varphi(\psi(u))$". La propriété $P(0)$ est vraie (laissé en exercice !).
   > Supposons que u est dans E et que $P(u)$. Alors
   > $$\begin{array}{rcll} \psi(\varphi(u.\varphi(u))) & = & \psi(\varphi(u)).\psi(\varphi(\varphi(u))) & \text{(car } \psi \text{ et } \varphi \text{ sont des morphismes)} \\ & = & \psi(\varphi(u)).\psi(u) & \text{puisque } \varphi \circ \varphi = \mathrm{Id} \\ & = & \varphi(\psi(u)).\psi(u) & \text{par hypothèse d'induction} \\ & = & \varphi(\psi(u)).\varphi(\varphi(\psi(u))) & \text{puisque } \varphi \circ \varphi = \mathrm{Id} \\ & = & \varphi(\psi(u).\varphi(\psi(u))) & \text{puisque } \varphi \text{ est un morphisme} \\ & = & \varphi(\psi(u).\psi(\varphi(u))) & \text{par hypothèse d'induction} \\ & = & \varphi(\psi(u.\varphi(u))) & \text{puisque } \psi \text{ est un morphisme} \end{array}$$
   > c'est-à-dire que $P(u.\varphi(u))$ (est vraie).
   >
   > Par induction structurelle, pour tout u de E, $\varphi(\psi(u)) = \psi(\varphi(u))$.

4. Montrer par induction structurelle sur E que $\forall u \in E, u.\varphi(u) = \psi(u)$.

Vrai pour 0.
Supposons que pour un u quelconque dans E, $(u.\varphi(u)) = \psi(u)$, montrons que $(u.\varphi(u)).\varphi(u.\varphi(u)) = \psi(u.\varphi(u))$.

$$\begin{array}{rcll} \psi(u.\varphi(u)) & = & \psi(u).\psi(\varphi(u)) & \text{(car } \psi \text{ est un morphisme)} \\ & = & \psi(u).\varphi(\psi(u)) & \text{puisque pour tout } u \text{ de } E,\ \psi(\varphi(u)) = \varphi(\psi(u)) \\ & = & (u.\varphi(u)).\varphi(u.\varphi(u)) & \text{par hypothèse d'induction} \end{array}$$

Par induction structurelle, pour tout u de E, $(u.\varphi(u)) = \psi(u)$.

5. Montrer que les termes de la suite $(u_n)_{n>0}$, sont dans G et que pour tout couple de termes de cette suite, l'un est un préfixe de l'autre.

On montre même que l'ensemble des termes de la suite u est exactement l'ensemble E, par double inclusion :

Par récurrence dans un sens : $u_0 = 0$ est dans E, u_1 est dans E et dans G. Si u_n est dans E et dans G, $u_{n+1} = \psi(u_n) = R(u_n)$ y est également (avec R la seule règle d'inférence engendrant E ; tout $u\varphi(u)$ est dans G). Par récurrence, tout u_n pour $n > 0$ est dans G et tout u_n pour $n = 0$ est dans E. (*Ceci est suffisant, mais on peut aller plus loin :*)

L'autre inclusion se montre par induction structurelle : pour v dans E, notons $P(v)$ la propriété "il existe n entier tel que $v = u_n$". On a bien $P(0)$, et si $P(v)$, puisque $R(v) = v.\varphi(v) = \psi(v)$. Par hypothèse de récurrence, il existe n tel que $v = u_n$, et alors $R(v) = \psi(v) = u_{n+1}$. Par induction structurelle, la propriété est vraie pour tout v de E.

Le premier sens aurait également pu être fait par induction structurelle sur l'ensemble des termes de la suite.

On montre la deuxième assertion par récurrence forte. Soit $P(n)$ la propriété : "les u_k sont préfixes de u_n, pour tout $0 < k \leqslant n$".

La propriété est vraie au rang 1 (u_1 est un préfixe de u_1).

Supposons qu'il existe un n pour lequel $P(n)$ soit vraie. Montrons que $P(n+1)$ est vraie.

La relation $u_{n+1} = \psi(u_n) = u_n.\varphi(u_n)$, valable pour tout élément de E (et donc pour les termes de la suite : *il fallait donc montrer l'inclusion des termes dans* E) permet de montrer que u_n est un préfixe de u_{n+1}. Par transitivité de la relation "être un préfixe", pour tout $k \leqslant n$, u_k est un préfixe de u_{n+1}. Tout mot étant un préfixe de lui-même, pour tout $k \leqslant n+1, u_k$ est un préfixe de u_{n+1}.

Par récurrence forte, tout couple de termes de la suite u est tel que l'un des termes est préfixe de l'autre.