

Logique

1. Trouver l'ensemble des modèles de $(p \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q)$; $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg r)$; $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$
2. Montrer que les formules suivantes sont des tautologies :
 - $p \Rightarrow p$
 - $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
 - $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$
 - $((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$
3. Prouver les équivalences :
 - $\phi \vee \perp \equiv \phi$
 - $\phi \vee \top \equiv \top$
 - $\phi \vee \psi \equiv \psi \vee \phi$
 - $\phi \vee \phi \equiv \phi$
 - $\neg \neg \phi \equiv \phi$
 - $\phi \wedge \perp \equiv \perp$
 - $\phi \wedge \top \equiv \phi$
 - $\phi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \phi$
 - $\neg(\phi \vee \psi) \equiv (\neg \phi) \wedge (\neg \psi)$
 - $\phi \wedge \phi \equiv \phi$
 - $(\phi \wedge \psi) \wedge \theta \equiv \phi \wedge (\psi \wedge \theta)$
 - $(\phi \wedge \psi) \vee \theta \equiv (\phi \vee \theta) \wedge (\psi \vee \theta)$
 - $(\phi \vee \psi) \wedge \theta \equiv (\phi \wedge \theta) \vee (\psi \wedge \theta)$
 - $\neg(\phi \wedge \psi) \equiv (\neg \phi) \vee (\neg \psi)$
 - $\phi_1 \Rightarrow (\phi_2 \Rightarrow \phi_3) \equiv (\phi_1 \wedge \phi_2) \Rightarrow \phi_3$
4. Trois élèves se retrouvent chaque jour, suivant ces règles :
 - (a) Charlotte ou Dana au moins joue, parfois les deux ;
 - (b) lorsque Dana joue, Charlotte joue également.
 - (c) L'une des deux parmi Alice et Dana, mais jamais les deux, jouent ;
 - (d) Lorsque Charlotte joue aux cartes, Alice joue également ;
 - Qui joue ?
 - Aurait-on pu résoudre le problème en supprimant l'une des règles précisées ?
5. Soient p, q, r et s t.q. $\phi_1 : q \wedge \neg r$, $\phi_2 : p \Rightarrow (r \vee s)$, $\phi_3 : \neg r \wedge (q \vee p)$, et $\Gamma_1 = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$
 - Peut-on simplifier l'ensemble Γ_1 sans changer l'ensemble de ses modèles ?
 - Quel est l'ensemble de l'ensemble Γ_2 obtenu ?
 - Γ_2 est-il consistant ? Contradictoire ?
 - Quelles sont les conséquences logiques de Γ_2 ?
 - Si on ajoute une nouvelle contrainte : $\Gamma_3 = \{\neg q \wedge \neg s\} \cup \Gamma_2$, qu'en est-il de Γ_3 ?