Logique : syntaxe des formules logiques

6 février 2022

Table of Contents

Table of Contents

Définition

Définition Un **connecteur logique** est un opérateur, parmi (par ordre de priorité décroissante)

- la négation, notée $\neq$
- la conjonction notée $\wedge$
- la disjonction notée $\vee$
- l'implication : $\Rightarrow$
- l'équivalence : $\Leftrightarrow$

La négation est d'arité 1, les autres opérateurs d'arité 2

Dans ce qui suit, on note X un ensemble de symboles appelés **variables propositionnelles**.

Dans ce qui suit, on note X un ensemble de symboles appelés **variables propositionnelles**.

Définition l'ensemble $\mathbb{F}$ des **formules propositionnelles** sur l'ensemble (fini ou infini dénombrable) des variables et des connecteurs logiques est défini par

- $\top$ et $\bot$ sont des formules propositionnelles ;
- toute variable propositionnelle est une formule propositionnelle ;
- Pour tout $F \in \mathbb{F}$, $\neg F \in \mathbb{F}$;
- Pour tout $(F_1, F_2) \in \mathbb{F}^2$, pour tout $\otimes \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$, $F_1 \otimes F_2 \in \mathbb{F}$.

Dans ce qui suit, on note X un ensemble de symboles appelés **variables propositionnelles**.

Définition l'ensemble $\mathbb{F}$ des **formules propositionnelles** sur l'ensemble (fini ou infini dénombrable) des variables et des connecteurs logiques est défini par

- $\top$ et $\bot$ sont des formules propositionnelles ;
- toute variable propositionnelle est une formule propositionnelle ;
- Pour tout $F \in \mathbb{F}$, $\neg F \in \mathbb{F}$;
- Pour tout $(F_1, F_2) \in \mathbb{F}^2$, pour tout $\otimes \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$, $F_1 \otimes F_2 \in \mathbb{F}$.

Les formules propositionnelles sont des mots sur l'alphabet
$\Sigma = X \cup \{\top, \bot\} \cup \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\} \cup \{(,)\}$

Définition par récurrence

.On peut également définir par récurrence les ensembles $\mathscr{F}_n$:

- $\mathscr{F}_0 = \mathbb{X} \cup \{\top, \bot\}$
- pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathscr{F}_{n+1} = F_n \cup \{\neg F, F \in \mathscr{F}_n\} \cup \{F_1 \otimes F_2, F_1, F_2 \in \mathscr{F}_n, \in \mathbb{F} \otimes \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}\}$

Définition par récurrence

.On peut également définir par récurrence les ensembles $\mathscr{F}_n$:

- $\mathscr{F}_0 = \mathbb{X} \cup \{\top, \bot\}$
- pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathscr{F}_{n+1} = F_n \cup \{\neg F, F \in \mathscr{F}_n\} \cup \{F_1 \otimes F_2, F_1, F_2 \in \mathscr{F}_n, \in \mathbb{F} \otimes \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}\}$

Soit F une formule propositionnelle (F_1, F_2 de même).

- La longueur d'une formule est le nombre de symboles de Σ qu'elle contient ;

Définition par récurrence

.On peut également définir par récurrence les ensembles $\mathscr{F}_n$:

- $\mathscr{F}_0 = \mathbb{X} \cup \{\top, \bot\}$
- pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathscr{F}_{n+1} = F_n \cup \{\neg F, F \in \mathscr{F}_n\} \cup \{F_1 \otimes F_2, F_1, F_2 \in \mathscr{F}_n, \in \mathbb{F} \otimes \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}\}$

Soit F une formule propositionnelle (F_1, F_2 de même).

- La longueur d'une formule est le nombre de symboles de Σ qu'elle contient ;
- la hauteur d'une formule est le plus petit entier n telle qu'elle appartienne à $\mathscr{F}_n$;

Définition par récurrence

.On peut également définir par récurrence les ensembles $\mathscr{F}_n$:

- $\mathscr{F}_0 = \mathbb{X} \cup \{\top, \bot\}$
- pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathscr{F}_{n+1} = F_n \cup \{\neg F, F \in \mathscr{F}_n\} \cup \{F_1 \otimes F_2, F_1, F_2 \in \mathscr{F}_n, \in \mathbb{F} \otimes \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}\}$

Soit F une formule propositionnelle (F_1, F_2 de même).

- La longueur d'une formule est le nombre de symboles de Σ qu'elle contient ;
- la hauteur d'une formule est le plus petit entier n telle qu'elle appartienne à $\mathscr{F}_n$;
- la taille de F, notée $|F|$ est définie de manière inductive par
  - $|\top| = |\bot| = 0$
  - Si F est une variable prop., alors $|F| = 0$
  - $|\neg F| = 1 + |F|$
  - $|F_1 \otimes F_2| = |F_1| + |F_2| + 1$ pour $\otimes \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$

Table of Contents

Définition

Définition Soit $F \in \mathbb{F}$. L'arbre syntaxique de F, noté $\mathbb{A}_F$, est un arbre binaire (G, r, D) défini de manière inductive sur la structure de F par :

- si F est une variable propositionnelle, $\mathbb{A}_F = (\emptyset, F, \emptyset)$;
- si $F = \neg F_1$, $\mathbb{A}_F = (\mathbb{A}_{F_1}, \neg, \emptyset)$;
- soit $\otimes \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$, si $F = F_1 \otimes F_2$, $\mathbb{A}_F = (\mathbb{A}_{F_1}, \oplus, \mathbb{A}_{F_2})$;

Les formules propositionnelles sont décomposables d'une façon unique en leurs sous-formules (admis). L'unicité implique qu'on identifie une formule à son arbre ; une sous-formule à un noeud dans l'arbre (ou un sous-arbre)

Table of Contents

Une substitution σ est une application de l'ensemble des variables dans l'ensemble des formules, qui consiste à remplacer dans une formule F toute variable x par $\sigma(x)$.

Une substitution σ est une application de l'ensemble des variables dans l'ensemble des formules, qui consiste à remplacer dans une formule F toute variable x par $\sigma(x)$.
On note $\sigma(F)_x$ la formule dans laquelle on a remplacé toute occurrence de x dans F par $\sigma(x)$. La formule $\sigma(F)_x$ peut-être définie de manière inductive :

- si F est la variable propositionnelle x, alors $\sigma(F)_x = \sigma(x)$
- si F est une variable propositionnelle $x_1 \neq x$, alors $\sigma(F)_x = F$
- si $F = \neg F_1$, alors $\sigma(F)_x = \neg\sigma(F_1)_x$
- soit $\otimes \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$, si $F = F_1 \otimes F_2$, $\sigma(F)_x = \sigma(F_1)_x \otimes \sigma(F_2)_x$

Une substitution σ est une application de l'ensemble des variables dans l'ensemble des formules, qui consiste à remplacer dans une formule F toute variable x par $\sigma(x)$.
On note $\sigma(F)_x$ la formule dans laquelle on a remplacé toute occurrence de x dans F par $\sigma(x)$. La formule $\sigma(F)_x$ peut-être définie de manière inductive :

- si F est la variable propositionnelle x, alors $\sigma(F)_x = \sigma(x)$
- si F est une variable propositionnelle $x_1 \neq x$, alors $\sigma(F)_x = F$
- si $F = \neg F_1$, alors $\sigma(F)_x = \neg\sigma(F_1)_x$
- soit $\otimes \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$, si $F = F_1 \otimes F_2$, $\sigma(F)_x = \sigma(F_1)_x \otimes \sigma(F_2)_x$

Cette définition peut être étendue à la substitution simultanée de plusieurs variables propositionnelles différentes, en gardant en mémoire que cette substitution simultanée peut différer d'une séquence des mêmes substitutions.

Table of Contents

Table of Contents

La logique propositionnelle ne permet pas d'envisager des propositions existentielles ou universelles. La logique du premier ordre nécessite l'emploi de connecteurs particuliers : les quantificateurs.

La logique propositionnelle ne permet pas d'envisager des propositions existentielles ou universelles. La logique du premier ordre nécessite l'emploi de connecteurs particuliers : les quantificateurs.

- Quantificateur universel : $\forall$
- Quantificateur existentiel : $\exists$

La logique propositionnelle ne permet pas d'envisager des propositions existentielles ou universelles. La logique du premier ordre nécessite l'emploi de connecteurs particuliers : les quantificateurs.

- Quantificateur universel : $\forall$
- Quantificateur existentiel : $\exists$

Les quantificateurs portent sur des variables. On ajoute au langage le délimiteur "," , et , selon le langage que l'on souhaite utiliser, d'autres symboles (par exemple, ceux du calcul arithmétique). Chaque langage possède ainsi une **signature**, qui est un triplet $(\mathscr{C}, \mathscr{O}, \mathscr{R})$, où $\mathscr{C}$ est un ensemble de symboles de constantes ;

La logique propositionnelle ne permet pas d'envisager des propositions existentielles ou universelles. La logique du premier ordre nécessite l'emploi de connecteurs particuliers : les quantificateurs.

- Quantificateur universel : $\forall$
- Quantificateur existentiel : $\exists$

Les quantificateurs portent sur des variables. On ajoute au langage le délimiteur "," , et , selon le langage que l'on souhaite utiliser, d'autres symboles (par exemple, ceux du calcul arithmétique). Chaque langage possède ainsi une **signature**, qui est un triplet $(\mathscr{C}, \mathscr{O}, \mathscr{R})$, où $\mathscr{C}$ est un ensemble de symboles de constantes ; $\mathscr{O}$ est un ensemble de symboles de fonctions, chaque symbole possédant une arité ;

La logique propositionnelle ne permet pas d'envisager des propositions existentielles ou universelles. La logique du premier ordre nécessite l'emploi de connecteurs particuliers : les quantificateurs.

- Quantificateur universel : $\forall$
- Quantificateur existentiel : $\exists$

Les quantificateurs portent sur des variables. On ajoute au langage le délimiteur "," , et , selon le langage que l'on souhaite utiliser, d'autres symboles (par exemple, ceux du calcul arithmétique). Chaque langage possède ainsi une **signature**, qui est un triplet $(\mathscr{C}, \mathscr{O}, \mathscr{R})$, où $\mathscr{C}$ est un ensemble de symboles de constantes ; $\mathscr{O}$ est un ensemble de symboles de fonctions, chaque symbole possédant une arité ; $\mathscr{R}$ est un ensemble de symboles de relations, chaque relation étant associée à une arité.

La logique propositionnelle ne permet pas d'envisager des propositions existentielles ou universelles. La logique du premier ordre nécessite l'emploi de connecteurs particuliers : les quantificateurs.

- Quantificateur universel : $\forall$
- Quantificateur existentiel : $\exists$

Les quantificateurs portent sur des variables. On ajoute au langage le délimiteur "," , et , selon le langage que l'on souhaite utiliser, d'autres symboles (par exemple, ceux du calcul arithmétique). Chaque langage possède ainsi une **signature**, qui est un triplet $(\mathscr{C}, \mathscr{O}, \mathscr{R})$, où $\mathscr{C}$ est un ensemble de symboles de constantes ; $\mathscr{O}$ est un ensemble de symboles de fonctions, chaque symbole possédant une arité ; $\mathscr{R}$ est un ensemble de symboles de relations, chaque relation étant associée à une arité.
On suppose que $\mathscr{X}$, $\mathscr{C}$, $\mathscr{O}$, $\mathscr{R}$ sont disjoints. Une formule de la logique du premier ordre est un mot sur l'alphabet $\Sigma \cup \mathscr{X} \cup \mathscr{C} \cup \mathscr{O} \cup \mathscr{R}$.

Définition

Un **terme** est défini de manière inductive

- Toute variable est un terme ;
- toute constante est un terme ;
- soit o d'arité n et $t_1, \ldots, t_n$ des termes quelconques, alors $o(t_1, \ldots, t_n)$ est un terme.

Définition Une **formule atomique** sur une signature $S = (\mathscr{C}, \mathscr{O}, \mathscr{R})$ est un mot sur l'alphabet S de la forme $R(t_1, \ldots, t_n)$ où R est d'arité n et $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes sur S.

On peut maintenant définir les formules de la logique du premier ordre : **Définition**

- Une formule atomique est une formule ;
- si F est une formule, alors $\neg F$ est une formule ;
- si $F = \neg F_1$, alors $\sigma(F)_x = \neg\sigma(F_1)_x$;
- si F_1 et F_2 sont des formules, pour tout $\otimes \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$, $F_1 \otimes F_2$ est une formule ;
- Si F est une formule, et si $x \in X$ alors $\exists x F$ et $\forall x F$ sont des formules.

Table of Contents

Définition Une **occurrence** d'une variable x dans une formule F est un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que le $n$ème symbole de F est x et que le $(n-1)$ème symbole n'est pas un quantificateur.

Définition Une **occurrence** d'une variable x dans une formule F est un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que le $n$ème symbole de F est x et que le $(n-1)$ème symbole n'est pas un quantificateur.

Soient une variable x et une formule F. La **portée de la liaison** x dans $\forall x F$ est F.

Définition Une **occurrence** d'une variable x dans une formule F est un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que le $n$ème symbole de F est x et que le $(n-1)$ème symbole n'est pas un quantificateur.
Soient une variable x et une formule F. La **portée de la liaison** x dans $\forall x F$ est F.
Une occurrence de x dans la formule est **liée** si elle est dans la portée d'une liaison pour x ; sinon, elle est **libre**.

Définition Une **occurrence** d'une variable x dans une formule F est un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que le $n$ème symbole de F est x et que le $(n-1)$ème symbole n'est pas un quantificateur.
Soient une variable x et une formule F. La **portée de la liaison** x dans $\forall x F$ est F.
Une occurrence de x dans la formule est **liée** si elle est dans la portée d'une liaison pour x ; sinon, elle est **libre**.
Soit F une formule. Une variable x de F est libre (*resp.* liée) ssi il existe une occurrence libre (*resp.* liée) de x dans F.

Table of Contents

Un raisonnement logique consiste en l'interprétation d'un ensemble de formules logiques pour déduire de faits un nouveau fait. On utilise pour cela le **modus ponens**, qui s'écrit $p, p \Rightarrow q \vdash q$ où $\vdash$ représente la déduction.